STATO LIMITE ULTIMO (D.M. 14.01.2008)
CALCOLO ARMATURE SEZIONE RETTANGOLARE

Per la determinazione della resistenza ultima delle sezioni in c.a. nei confronti delle sollecitazioni di flessione, così come previsto al ***4.1.2.1.2*** delle NCT 2008, si adotteranno le seguenti ipotesi:
- conservazione delle sezioni piane;
- perfetta aderenza tra acciaio e calcestruzzo;
- resistenza a trazione del calcestruzzo nulla;
- rottura del calcestruzzo determinata dal raggiungimento della sua capacità deformativa ultima a compressione;
- rottura dell'armatura tesa determinata dal raggiungimento della sua capacità deformativa ultima;
- deformazione iniziale dell'armatura di precompressione considerata nelle relazioni di congruenza della sezione.

Le tensioni nel calcestruzzo e nell'armatura si dedurranno, a partire dalle deformazioni, utilizzando i rispettivi diagrammi tensione-deformazione;

4.1.2.1.2.2 *Diagrammi di calcolo tensione-deformazione del calcestruzzo*

Per il diagramma tensione-deformazione del calcestruzzo è possibile adottare opportuni modelli rappresentativi del reale comportamento del materiale, modelli definiti in base alla resistenza di calcolo $\mathbf{f_{cd}}$ ed alla deformazione ultima $\boldsymbol{\varepsilon_{cu}}$.

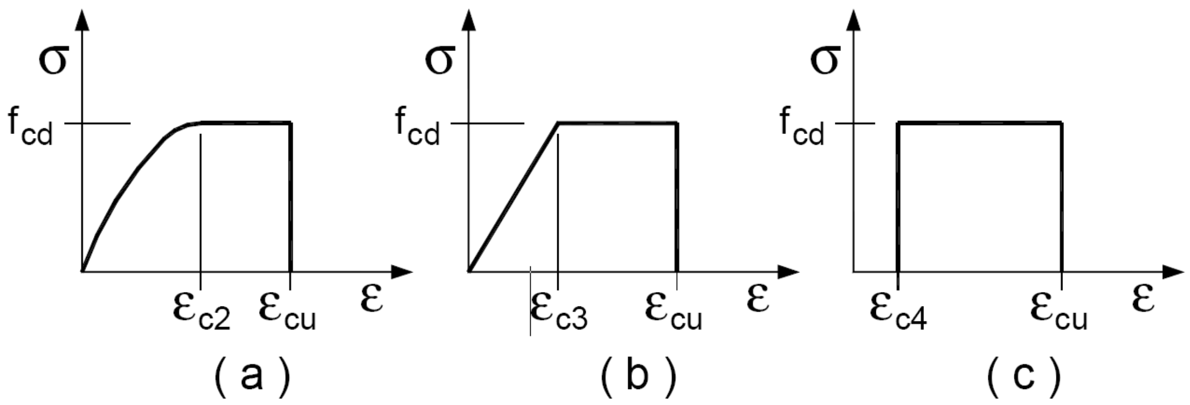


Figura 4.1.1 – *Modelli σ-ε per il calcestruzzo*

In Fig. 4.1.1 sono rappresentati i modelli σ - ε per il calcestruzzo: (a) parabola-rettangolo; (b) triangolo-rettangolo; (c) rettangolo (stress block). In particolare, per le classi di resistenza pari o inferiore a C50/60 si può porre:

$$\varepsilon_{c2} = 0,20\% \qquad \varepsilon_{cu} = 0,35\%$$
$$\varepsilon_{c3} = 0,175\% \qquad \varepsilon_{c4} = 0,07\%$$

Per le classi di resistenza superiore a C50/60 si può porre:

$$\varepsilon_{c2} = 0,20\% + 0,0085\%(f_{ck} - 50)^{0,53} \qquad \varepsilon_{cu} = 0,26\% + 3,5\%\left[(90 - f_{ck})/100\right]^4$$
$$\varepsilon_{c3} = 0,175\% + 0,055\%\left[(f_{ck} - 50)/40\right] \qquad \varepsilon_{c4} = 0,2 \cdot \varepsilon_{cu}$$

purché si adottino opportune limitazioni quando si usa il modello (c).

Per sezioni o parti di sezioni soggette a distribuzioni di tensione di compressione approssimativamente uniformi, si assume per la deformazione ultima a rottura il valore ε_{c2} anziché ε_{cu}.

4.1.2.1.2.3 Diagrammi di calcolo tensione-deformazione dell'acciaio

Per il diagramma tensione-deformazione dell'acciaio è possibile adottare opportuni modelli rappresentativi del reale comportamento del materiale, modelli definiti in base al valore di calcolo $\varepsilon ud = 0{,}9\varepsilon_{uk}$ ($\varepsilon_{uk} = (A_{gt})k$) della deformazione uniforme ultima, al valore di calcolo della tensione di snervamento f yd ed al rapporto di sovraresistenza k = (ft / fy)k (Tab. 11.3.Ia-b).
In Fig. 4.1.2 sono rappresentati i modelli σ – ε per l'acciaio: (a) bilineare finito con incrudimento; (b) elastico-perfettamente plastico indefinito.

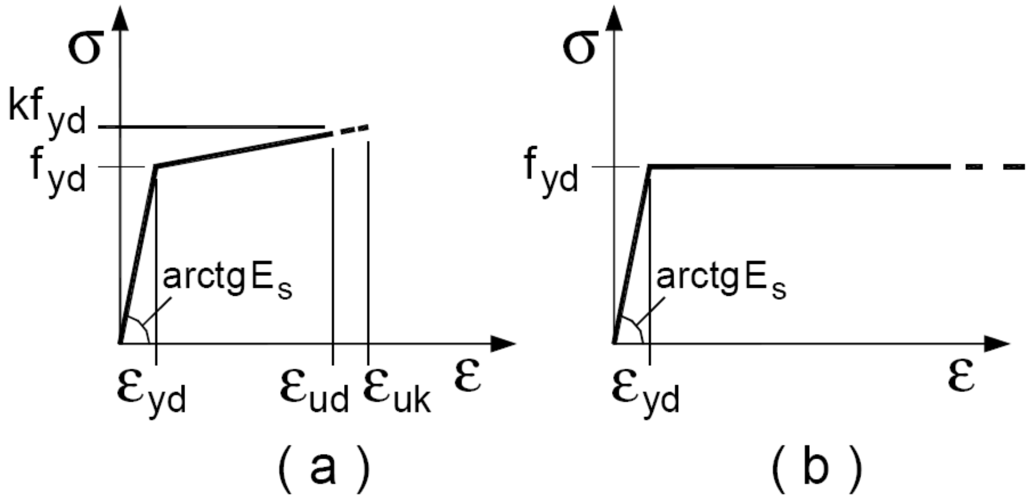
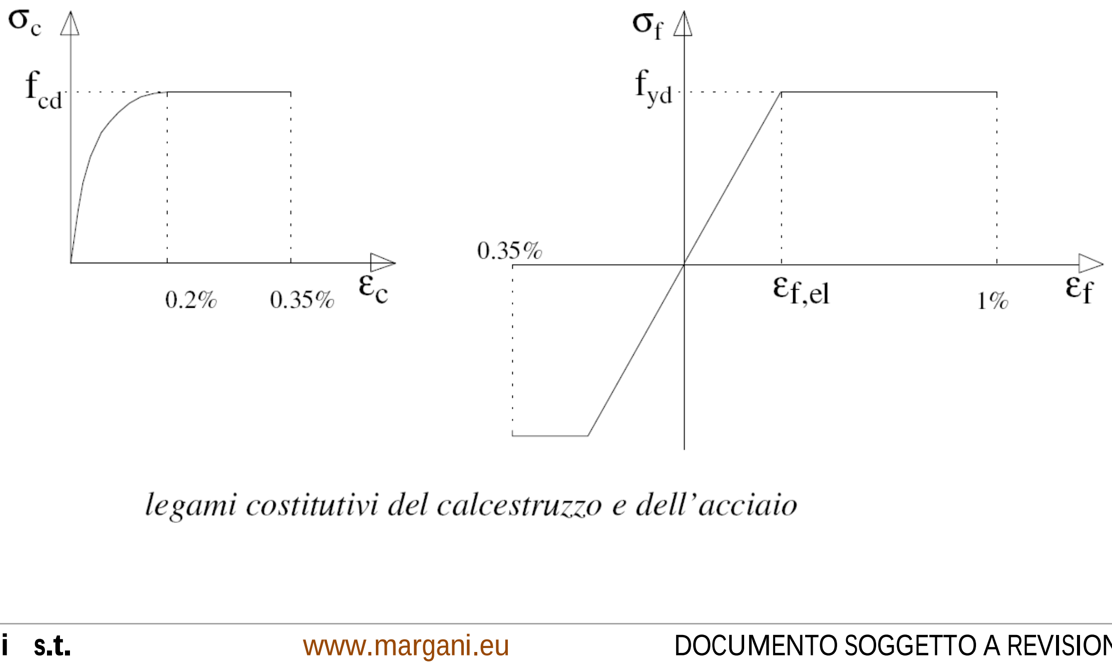


Figura 4.1.2– *Modelli σ-ε per l'acciaio*

In definitiva per il calcestruzzo e per l'acciaio ai fini di verifica assumiamo:



legami costitutivi del calcestruzzo e dell'acciaio

Il legame fra resistenza di calcolo a compressione, $\mathbf{f}_{cd}$ è legata alla resistenza caratteristica a rottura $\mathbf{R}_{ck}$, attraverso la relazione

$$f_{cd} = 0.85 \cdot \frac{0.83 \cdot R_{ck}}{\gamma_c}$$

$\mathbf{f}_{ck}$ è la resistenza caratteristica cilindrica a compressione del calcestruzzo a 28 giorni.
$\mathbf{R}_{ck}$ è la resistenza caratteristica cubica a compressione del calcestruzzo a 28 giorni.
Il coefficiente γ_C è pari ad 1,5.

La resistenza di calcolo dell'acciaio $\mathbf{f}_{yd}$ è riferita alla tensione di snervamento ed il suo valore è dato da:

$$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_S$$

f_{yk} per armatura ordinaria è la tensione caratteristica di snervamento dell'acciaio (v. § 11.3.2)
Il coefficiente γ_S assume sempre, per tutti i tipi di acciaio, il valore 1,15.

Si ipotizza che la rottura per flessione si raggiunga quando si verifica una delle seguenti condizioni:
– eccesso di deformazione plastica nell'acciaio teso, che si ha quando raggiunge il valore del 1%;
– eccesso di deformazione nel calcestruzzo compresso che si ha quando raggiunge il valore di .35%;

La crisi della sezione può avvenire a causa dei seguenti meccanismi, detti campi di rottura:

CAMPO 1 (solo per tensoflessione)

• Sezione tutta tesa, le sollecitazioni possono essere di trazione semplice o composta. Nel caso di trazione puta sia l'armatura inferiore che quella superiore raggiungono la deformazione ultima ε_{fu} e la tensione nell'acciaio sarà pari a $f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s$ (retta A-A'). Per sollecitazioni di trazione+flessione la retta A-A' ruota intorno ad A fino a raggiungere la retta AO; per la linearità del diagramma delle deformazioni, l'asse neutro può essere ubicato all'infinito (-∞) nel caso di pura trazione oppure essere coincidente con il lembo superiore della sezione (x=0) nel caso di tensoflessione. In definitiva in questo campo il rapporto x/d è compreso nell'intervallo:

$$-\infty < x/d \leq 0$$

CAMPO 2

• La sezione risulta in parte tesa e in parte compressa. Il diagramma delle deformazioni ruota intorno ad A. In questo campo si ha deformazione massima dell'acciaio con $\varepsilon_f = \varepsilon_{fu} = 1\%$ e tensione $f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s$. La crisi della sezione di verifica per cedimento dell'acciaio teso. Poiché la deformazione massima del calcestruzzo risulta pari ad $\varepsilon_{cu} = 0.0035$ e la deformazione massima dell'acciaio teso pari ad ε_{fu} =0.01, dalla linearità del diagramma delle deformazioni si ha:

$$\frac{x}{d} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{fu}} = \frac{0.0035}{0.0035+0.01} = 0.2593$$

In definitiva in questo campo il rapporto x/d è compreso nell'intervallo:

$$0 \leq x/d \leq 0.2593$$

Il diagramma delle deformazione ruota intorno al punto A, la retta corrispondente alle deformazioni della sezione in questo campo varia da AO ad AB. L'acciaio teso è snervato, l'acciaio compresso può essere snervato oppure no. Le deformazioni del calcestruzzo variano da $\varepsilon_c = 0$ ad $\varepsilon_{cu} = 0.0035$.

CAMPO 3

• La sezione risulta in parte tesa e in parte compressa. Il calcestruzzo ha la deformazione massima al lembo superiore della sezione, le armature inferiori deformazioni che vanno oltre il limite di snervamento.
Per un acciaio tipo B450C si ha: f_{yk} = 4500 kg/cm^2 ; f_{yd} = $f_{yk}/1.15$ = 3913 kg/cm^2; E = 2100000 kg/cm^2;

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_f} = \frac{3913}{2100000} = 0.00186$$

Per la linearità del diagramma delle deformazioni , le rette che ruotano intorno a B e che delimitano il campo 3 dal campo 4 hanno un rapporto x/d è compreso nell'intervallo:

$$\frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu}+\varepsilon_{fu}} = \frac{0.0035}{0.0035+0.01} = 0.2593 \leq \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}} \leq \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu}+\varepsilon_{yd}} = \frac{0.0035}{0.0035+0.00186} = 0.65298$$

CAMPO 4

• La sezione risulta in parte tesa e in parte compressa. Il calcestruzzo ha la deformazione massima al lembo superiore della sezione, le armature inferiori hanno deformazioni comprese in campo elastico:

$$\varepsilon_{yd} \geq \varepsilon_f \geq 0 \quad \text{ossia} \quad 0.00186 \geq \varepsilon_f \geq 0$$

La crisi avviene per schiacciamento del calcestruzzo e il rapporto x/d è compreso fra:

$$0.65298 \leq \frac{x}{d} \leq 1$$

Il rapporto x/d = 1 indica che l'asse neutro passa nel baricentro delle armature tese.
Il diagramma delle deformazioni ruota attorno al punto B.

CAMPO 5 (solo per pressoflessione)

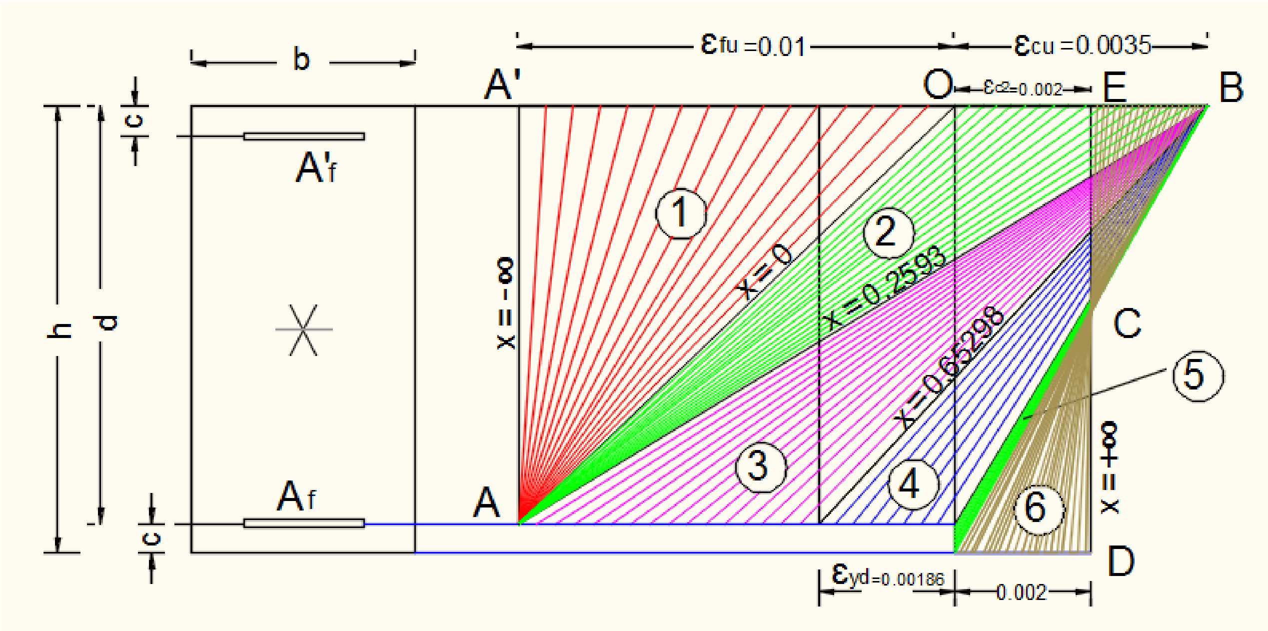
• L'asse neutro passa fra le armature inferiori e il lembo inferiore della sezione. La sezione risulta quasi tutta compressa ad esclusione di una piccola parte compresa fra armature inferiori e lembo inferiore della sezione. La crisi avviene per cedimento del calcestruzzo. Il diagramma delle deformazioni ruota intorno a B. In questo campo si ha:

$$d \leq \frac{x}{h} \leq 1$$

CAMPO 6 (solo per pressoflessione)

• L'asse neutro è esterno alla sezione. La sezione risulta tutta compressa con piccole eccentricità. La crisi avviene per cedimento del calcestruzzo. Il diagramma delle deformazioni ruota intorno a C.
Quando le deformazioni della sezione si trovano nella posizione della retta DE, l'asse neutro si trova all'infinito e la sezione è sollecitata soltanto da sforzo normale, la deformazione massima del calcestruzzo deve essere pari a 0.002 (ε_{c2} = 0.2%) L'acciaio è compresso sia superiormente che inferiormente.

$$1 \leq \frac{x}{h} \leq +\infty$$



I campi a cui sismo interessati per la verifica a flessione sono i campi sono i campi 2 e 3, in questi campi l'acciaio è sempre snervato:

$$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_S$$

e la sezione ha rottura duttile.

Calcolo delle armature in una sezione rettangolare.

Per il calcolo delle armature di una sezione rettangolare procediamo in questo modo:
elementi noti: M, b, h, c, fyd, fyc;
elementi incogniti: A'f, Af ;
con
A'_f = armatura compressa e A_f = armatura tesa

Si premette che non esistono travi a semplice armatura quando l'azione cerchiante del calcestruzzo viene svolta dalle staffe.
Il DM/2008 al punto *7.4.6.2.1* ***(Travi* Armature longitudinali)** stabilisce al comma 1 che:

Almeno due barre di diametro non inferiore a 14 mm devono essere presenti superiormente e inferiormente per tutta la lunghezza della trave.

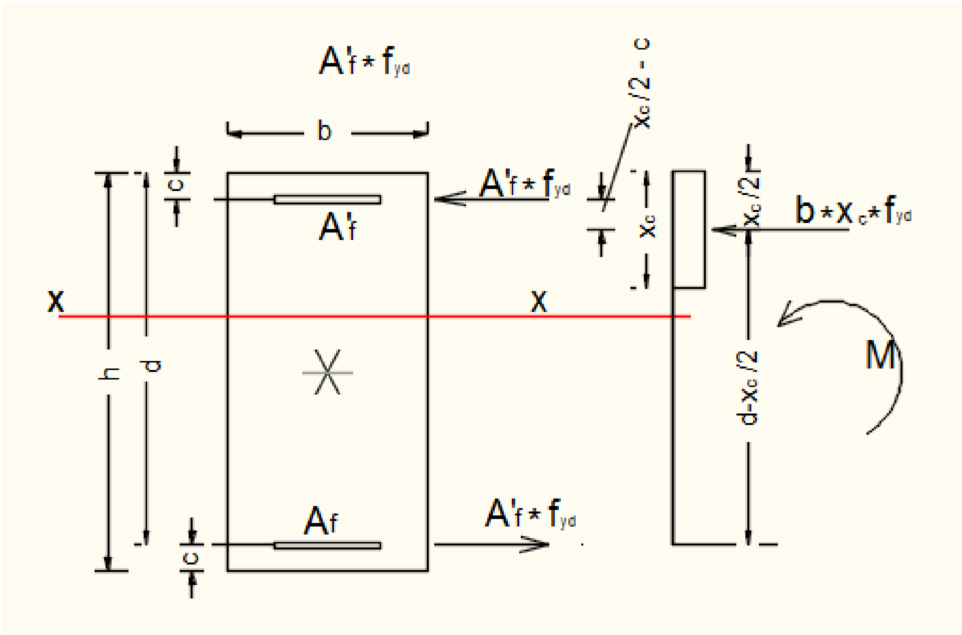
Il valore della posizione dell'asse neutro (nel caso in cui la rottura avviene per contemporaneo cedimento dell'acciaio e de calcestruzzo) è dato da:

$$x = 0.0035/(0.0035+0.01) * d = 0.2593*d$$

e rappresenta la profondità dell'asse neutro elativo ad una rottura "bilanciata" ossia per contemporanea rottura dell'acciaio e del calcestruzzo.
Le deformazioni specifiche dei materiali si ricavano per linearità fissata la regione di rottura.

L'altezza del calcestruzzo compresso risulta $x_c = 0.8 * x$ assimilando l'area della parabola-rettangolo ad un rettangolo.

Fissiamo la quantità di armatura compressa pari a 2 Ø 14 oppure a due ferri del diametro prescelto in fase di calcolo, come definito dalla normativa. Quindi il valore di A'_f è un valore noto e l'unica incognita rimane A_f.



Consideriamo la sezione a semplice armatura calcolando il valore di M_1 assorbito soltanto dal calcestruzzo compresso.
L'equilibrio alla rotazione alla rotazione intorno al baricentro delle armature tese ci consente di calcolare il valore del Momento M_1 che il calcestruzzo è in grado di assorbire. Dall'equazione di equilibrio

$$M_1 = b * x_c * f_{cd} * \left(d - \frac{x_c}{2}\right) \qquad (1)$$

Si possono verificare due casi:
CASO N. 1: il valore di M_1 **è maggiore** del momento sollecitante M_{ED} e allora dall'equilibrio alla rotazione intorno al baricentro del calcestruzzo compresso ricaviamo il valore di A_f.

$$M = A_f * f_{yd} * \left(d - \frac{x}{2}\right) + A'_f * f_{yd} * \left(\frac{x_c}{2} - c\right))$$

Per il calcolo A_f di fissiamo la quantità di armatura compressa pari a 2 Ø 14 oppure a due ferri del diametro prescelto in fase di calcolo, come definito dalla normativa.

$$A_f = \frac{M - A'_f * f_{yd} * \left(\frac{x_c}{2} - c\right)}{f_{yd} * \left(d - \frac{x_c}{2}\right)} \qquad (2)$$

Abbiamo trovato il valore di A_f e A'_f che equilibrano il momento sollecitante M_{ED}.

CASO N. 2: Nel caso in cui il valore di M_1, precedentemente trovato, **è minore** del momento sollecitante M_{ED} occorre trovare l'area delle armature compresse A'_f, dal momento che il solo calcestruzzo non è in grado di assorbire il momento sollecitante.

Si calcola il la differenza dei momenti $M_2 = M_1 - M_{eD}$ e quindi il valore di A'_{f2} in grado di assorbire la differenza di momento.

$$A'_{f2} = \frac{M_2}{f_{yd} * (d - c)}$$

A'_f diventa $A'_f = A'_f + A'_{f2}$. Trovato il nuovo A'_f si prosegue come al caso n. 1. Con A'_f pari a 2 Ø 14 oppure a due ferri del diametro prescelto in fase di calcolo, come definito al comma 1 del punto 7.4.6.2.1 dalla normativa (DM/2008).

Occorre ulteriormente controllare se sono soddisfatte, con le armature trovate, le limitazioni di cui ai punti:
4.1.6.1.1 e 7.4.6.2 .

armatura mima

4.1.6.1.1 Armatura delle travi

L'area dell'armatura longitudinale in zona tesa non deve essere inferiore a

$$A_{s,min} = 0,26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} \cdot b_t \cdot d \text{ e comunque non minore di } 0,0013 \cdot b_t \cdot d \text{ ,} \quad (4.1.43)$$

dove:

b_t rappresenta la larghezza media della zona tesa; per una trave a T con piattabanda compressa, nel calcolare il valore di b_t si considera solo la larghezza dell'anima;
d è l'altezza utile della sezione;
f_{ctm} è il valore medio della resistenza a trazione assiale definita nel § 11.2.10.2;
f_{yk} è il valore caratteristico della resistenza a trazione dell'armatura ordinaria.

7.4.6.2.1 Travi

Armature longitudinali

Almeno due barre di diametro non inferiore a 14 mm devono essere presenti superiormente e inferiormente per tutta la lunghezza della trave.

In ogni sezione della trave, salvo giustificazioni che dimostrino che le modalità di collasso della sezione sono coerenti con la classe di duttilità adottata, il rapporto geometrico ρ relativo all'armatura tesa, indipendentemente dal fatto che l'armatura tesa sia quella al lembo superiore della sezione A_s o quella al lembo inferiore della sezione A_i , deve essere compreso entro i seguenti limiti:

$$\boxed{\frac{1,4}{f_{yk}} < \rho < \rho_{comp} + \frac{3,5}{f_{yk}}} \quad (7.4.25)$$

dove:

ρ è il rapporto geometrico relativo all'armatura tesa pari ad $A_s/(b \cdot h)$ oppure ad $A_i/(b \cdot h)$;
ρ_{comp} è il rapporto geometrico relativo all'armatura compressa;
f_{yk} è la tensione caratteristica di snervamento dell'acciaio (in MPa).

Per la verifica delle relazioni deve essere:

$$A_f \geq \frac{1.5 * b * h}{0.1 * f_{yk}}$$

$$A'_f \geq \left(\frac{A_i}{b*h} - \frac{3.5}{0.1*f_{yk}} \right) * b * h$$

f_{yk} *espresso in* kg/cm^2

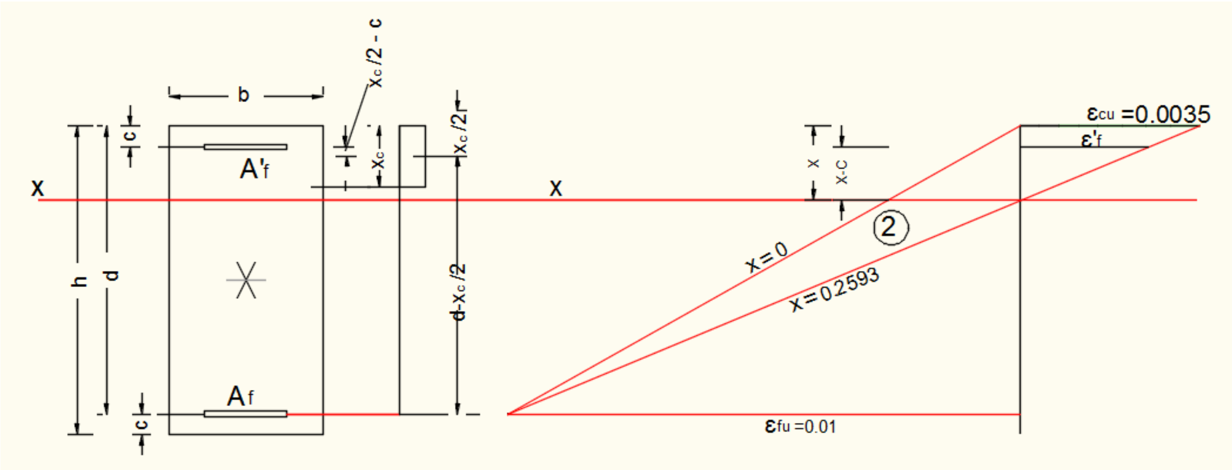
Si va ora a calcolare l'effettiva posizione dell'asse neutro considerando:

- le effettive aree delle sezioni delle armature tese e compresse;
- le effettive tensioni di esercizio dell'acciaio compresso;

per l'equilibrio alla traslazione si ha:

$$0.8*x*b*f_{cd} + A'_f * E_f * \varepsilon'_f - A_f * f_{yd} = 0 \qquad (5)$$

Considerando che te sezioni si mantengono piane a deformazione avvenuta si ha:



$$\frac{\varepsilon'_f}{x-c} = \frac{\varepsilon_{cu}}{x} \qquad \text{da cui} \qquad \varepsilon'_f = \frac{(x-c)*\varepsilon_{cu}}{x}$$

Sostituendo alla (5) il valore di ε'_f, l'equazione precedente diventa:

$$0.8*x^2*b*f_{cd} + A'_f*E_f*x*\varepsilon_{cu} - A'_f*E_f*c*\varepsilon_{cu} - A_f*f_{yd}*x = 0$$

Posto:

$A = (0.8*b*f_{cd})$

$B = (A'_f*E_f*\varepsilon_{cu} - A_f*f_{yd})$

$C = -A'_f*E_f*c*\varepsilon_{cu}$

L'equazione diventa:

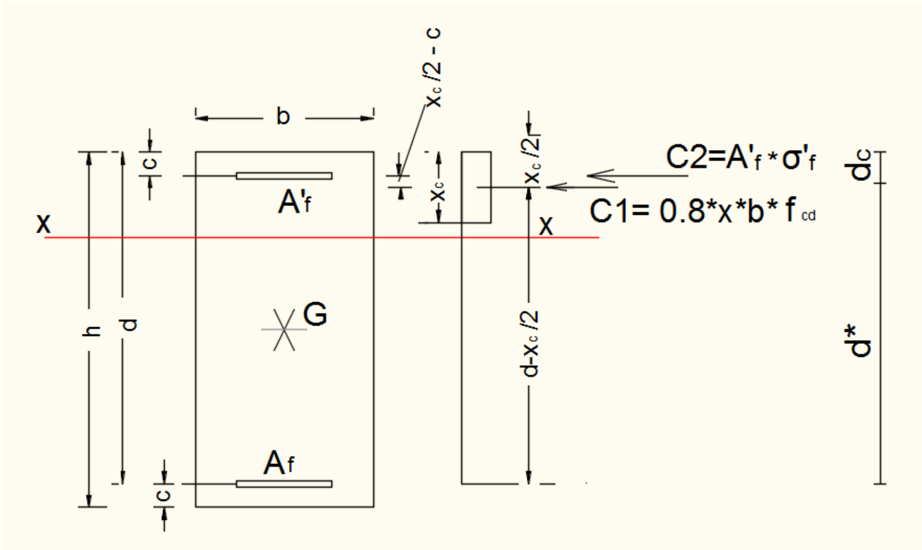
$$A*x^2 + B*x + C = 0$$

Trovato il valore dell'asse x si va a trovare il valore della deformazione ε_f e il valore della tensione

$\sigma'_f = E*\varepsilon'_f$. La tensione dell'acciaio teso non può superare il valore di f_{yk}/γ_s.

Se risulta:

0 < x/d < 0.2593 l'asse neutro si trova in campo 2
0.2593 < x/d < 0.66288 l'asse neutro si trova in campo 3



Indicando con:
$C1 = f_{cd} * b * 0.8 * X$ risultante delle tensioni nel calcestruzzo compresso
$C2 = \sigma'_f * A'f$ risultante dell'acciaio compresso
È possibile trovare la risultante C posizionata ad una distanza dc dal bordo superiore della sezione con la relazione:

$$dc = (0.5*C1*0.8*X + C2 * c) / C1+C2$$

il braccio della copia interna d* risulta pari a: (d-d*)
Il Momento resistente della sezione risulta pari a:

$$M_{RD} = (C1 + C2) * d$$

Per la verifica della sezione deve risultare $M_{RD} / M_{ED} > 1$

Il calcolo proposto per la determinazione delle armature tese e compresse è stato tradotto con codice Python.

ESERCIZIO
Progettare allo SLU una sezione rettangolare avente le seguenti caratteristiche.
dati:
b= 30 cm; h= 50 cm; c= 4 cm; M_{ED} = 2500000 Kg*cm, calcestruzzo classe 25/30; f_{yk}=450MPa
Incognite: A'_f , A_f

f_{cd} = 0.85*25/1.5 =141,67 = kg/cm² ; f_{yd}= 4500/1.15 = 3913 kg/cm² ;

$$f_{ctm} = 0.30 * f_{ck}^{2/3} = 11.905$$

$c = 4\ cm;$
$d = h - c = 50 - 4 = 46\ \ cm$
Si assume:
$x = 0.2593 * d = 0.2593 * 46 \ = 11.92\ \ cm$
Assumiamo $A'_f = 2\emptyset 14 = 3.08\ cm^2$
Poniamo:
$x_c = 0.8 * x = 0.8 * 11.92 = 9.54\ \ cm$
Dall'equilibrio alla rotazione intorno alle armature tese si calcola il valore di

$M_1 = b * x_c * f_{cd} * \left(d - \frac{x_c}{2}\right) + A'_f * f_{yd} * (d - c)$ ossia
M_1 = 30 ∗ 9.54 ∗ 141.67 ∗ (46 – 4.77) + 3.08 ∗ 3913 ∗ (46 – 4) = 1671710 + 506185 = 2177895 $kg * cm$

Poiché $M_{ED} > M_1$ occorre determinare una nuova armatura A'_f per far si che sia $M_1 > M_{ED}$.

$$A'_{f2} = \frac{M_2}{f_{yd} * (d - c)} = \frac{2500000 - 2177895}{3913 * (46 - 4)} = \frac{322105}{164346} = 1.96\ cm^2$$

A'_f diventa $A'_f = A'_f + A'_{f2}$ = 3.08 + 1.96 = 5.04 cm^2 . A questa area corrispondono 4 Ø 14 = 6.16 cm^2

dall'equilibrio alla rotazione intorno al baricentro del calcestruzzo compresso si ricava il valore di A_f.

$$M = A_f * f_{yd} * \left(d - \frac{x}{2}\right) + A'_f * f_{yd} * \left(\frac{x_c}{2} - c\right))$$

$$A_f = \frac{M - A'_f * f_{yd} * (\frac{x_c}{2} - c)}{f_{yd} * (d - \frac{x_c}{2})} = \frac{2500000 - 6.16 * 3913(4.77 - 4)}{3913 * (46 - 4.77)} = \frac{2481420}{161333} = 15.38\ cm^2 = \quad (2)$$

A questa area corrispondono 10 Ø 14 = 15.40 cm^2

Verifica limitazioni punto 4.1.6.1.1

$$A_{smin} = 0.26 * \frac{11.905}{3913} * 30 * 46 = 1.09 < 15.40$$

$$A_{smin} = 0.0013 * 30 * 46 = 0.78 < 15.40$$

Verifica limitazioni punto 7.4.6.1

$$A_f \geq \frac{1.5 * b * h}{0.1 * f_{yk}} = \frac{1.4 * 30 * 50}{450} = 4.66 \quad verificato$$

$$A'_f \geq \left(\frac{A_i}{b * h} - \frac{3.5}{0.1 * f_{yk}}\right) * b * h = \left(\frac{15.40}{30 * 50} - \frac{3.5}{450}\right) * 30 * 50 = 3.73 cm^2 \quad verificato$$

Si adottano pertanto :

A_f = 10 Ø 14 = 15.40 cm^2

A'_f = 3 Ø 14 = 6.16 cm^2

Determinazione della posizione dell'asse neutro e calcolo momento resistente
Dall'equilibrio alla traslazione

$$0.8 * x^2 * b * f_{cd} + A'_f * E_f * x * \varepsilon_{cu} - A'_f * E_f * c * \varepsilon_{cu} - A_f * f_{yd} * x = 0$$

Posto:
$A = (0.8 * b * f_{cd}) = 0.8 * 30 * 141.67 = 3400.00$
$B = (A'_f * E_f * \varepsilon_{cu} - A_f * f_{yd}) = (6.16 * 2100000 * 0.0035 - 15.40 * 3913 = -14978.84$
$C = -A'_f * E_f * c * \varepsilon_{cu} = -6.16 * 2100000 * 4 * 0.0035 = -181031.14$
L'equazione diventa:

$$A * x^2 + B * x + C = 0$$

$$3400.00 * x^2 - 14978.84 * x - 181031.14 = 0$$

$$x = 9.82$$

$$\varepsilon'_f = \frac{(9.82 - 4) * 0.0035}{9.82} = 0.002074 \;(\,acciaio\ snervato\,)$$

$$\sigma'_f = 3913 \;\frac{Kg}{cm^2}$$

$$C_1 = 141.67 * 30 * 0.8 * 9.82 = 33388 \;\; Kg$$

$$C_2 = 3913 * 6.16 = 24104 \;\; Kg$$

$$d_c = \frac{(0.5 * 33388 * 0.8 * 9.82 + 24104 * 4)}{33388 + 24104} = \frac{227564}{57492} = 3.96 \;\; cm$$

$$d^* = 46 - 3.96 = 42.04 \;\; cm$$

$$M_{RD} = (57492) * 42.04 = 2416963 \;\; Kg * cm$$

$$\frac{M_{RD}}{M_{ED}} = \frac{2416963}{2500000} = 0.967$$

$\frac{x}{d} = 0.1445 < 0.2593$ ***SEZIONE IN CAMPO 2***

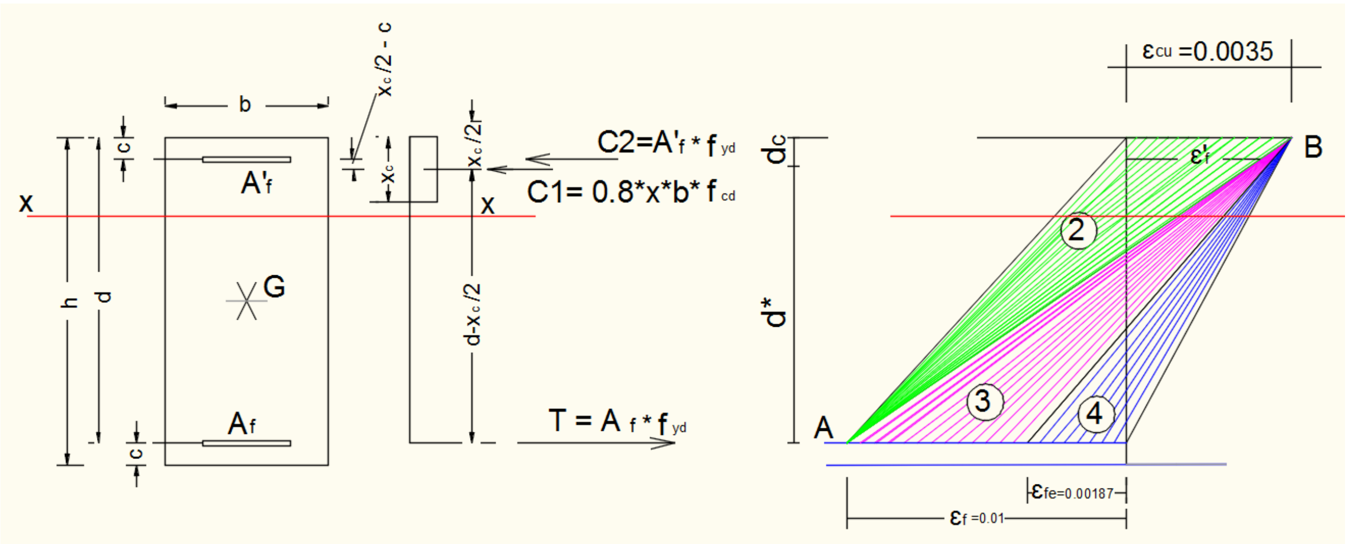
Si riportano i risultati ottenuti con codice Python:

base-	alt.-	c -	D. acc.	nfs-	nfi-	A'f	Af	Med (kg*cm)	Mrd (kg*cm)	Mrd/Med	x/d
30	50	4	14	2	5	3.08	7.70	1200000	1296389	1.08	0.14
30	50	4	14	2	6	3.08	9.24	1300000	1543351	1.19	0.16
30	50	4	14	2	6	3.08	9.24	1400000	1543351	1.10	0.16
30	50	4	14	2	7	3.08	10.78	1500000	1774166	1.18	0.19
30	50	4	14	2	7	3.08	10.78	1600000	1774166	1.11	0.19
30	50	4	14	3	7	4.62	10.78	1700000	1795455	1.06	0.17
30	50	4	14	3	8	4.62	12.32	1800000	2023687	1.12	0.19
30	50	4	14	3	8	4.62	12.32	1900000	2023687	1.07	0.19
30	50	4	14	4	8	6.16	12.32	2000000	2047734	1.02	0.17
30	50	4	14	6	10	9.24	15.39	2500000	2552639	1.02	0.17

VERIFICA ALLO S.L.U.
SEZIONE RETTANGOLARE A DOPPIA ARMATURA

La verifica allo stato limite ultimo consiste nel confrontare il momento agente sulla sezione (*Med*) con il Momento Resistente (*Mrd*) o resistenza flessionale della sezione, legato al raggiungimento della deformazione ultima in uno o in entrambi i materiali. La sezione oggetto di verifica viene considerata a doppia armatura; le sezioni a semplice armatura si incontrano molto raramente nelle strutture in c.a.. Essendo in condizioni di stato limite ultimo le tensioni sia nel calcestruzzo che nell'nell'acciaio dovranno essere pari a quelle ultime del materiale.

La posizione dell'asse neutro viene determinata imponendo l'equilibrio alla traslazione della sezione reagente, trascurando il contributo del calcestruzzo teso.
Il Momento Resistente viene determinato imponendo l'equilibrio alla rotazione intorno all'armatura tesa.



Nel grafico $x_c = 0.8 * x$

Dall'equilibrio alla traslazione si ha:

$$C1 + C2 - T = 0 \qquad (1)$$

indicando con:

$C1 = 0.8 * b * x * f_{cd}$	risultante delle tensioni di compressione nel calcestruzzo
$C2 = A'_f * E_f * \varepsilon'_f$	risultante delle tensioni nell'armatura compressa
$T = A_f * f_{yd}$	risultante delle tensioni nell'armatura tesa

In funzione alla quantità di armature compressa presente nella sezione, l'armatura compressa può essere snervata oppure no. Nel caso in cui l'armatura risulta snervata la tensione di esercizio è pari ad fyd, altrimenti risulta pari a $E_f * \varepsilon'_f$. Sfruttando la linearità del diagramma delle deformazioni è possibile determinare il comportamento dell'acciaio compresso e in quale campo di rottura si determina il Momento Resistente della sezione.
Dalla linearità del diagramma delle deformazioni si ottiene:

$$\frac{\varepsilon_{cu}}{x} = \frac{\varepsilon'_s}{x-c} = \frac{\varepsilon_s}{d-x} \qquad (2)$$

Per cui:

$$\varepsilon'_s = \frac{\varepsilon_{cu}}{x} * (x-c) \qquad (3)$$

Sostituendo il valore di ε' nella in $C2$ l'equazione di equilibrio alla traslazione diventa:

$$0.8 * b * x * f_{cd} \quad + \; A'_f * E_f * \frac{\varepsilon_{cu}}{x} * (x-c) \quad - \quad A_f * f_{yd} = 0$$

Sviluppando di ottiene una equazione di secondo grado della forma:

$$A * x^2 + B * x + C = 0 \qquad (4)$$

Con:
$A = 0.8 * b * f_{cd}$
$B = A'_f * E_s * \varepsilon_{cu} - A_f * f_{yd}$
$C = -c * E_f * A'_f * \varepsilon_{cu}$

Il valore di x determina la posizione dell'asse neutro.
Il valore della tensione nell'acciaio compresso dipende dalla deformazione, se l'acciaio è in campo elastico $\sigma'_f = E_s * \varepsilon'_s$, se l'acciaio compresso è snervato $\sigma'_f = f_{yd}$.
Il Momento Resistente viene determinato imponendo l'equilibrio alla rotazione intorno all'armatura tesa.

$$\boldsymbol{M_{rd} = C1 * (d-c) + C2 * (d - 0.4 * x)}$$

Per la verifica deve risultare:

$$\frac{M_{rd}}{M_{ed}} > 1$$

<u>NOTE:</u>
Risolvendo la (2) rispetto ad x si ottiene:

$$x = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} - \varepsilon'_s} * c \qquad (5)$$

Posto $\varepsilon'_s = 0.00187$, deformazione dell'acciaio al limite elastico
La precedente diventa:

$$x = \frac{0.0035}{0.0035 - 0.00187} = 2.14239 * c$$

Si può facilmente verificare che per $x < 2.14239 * c$ l'acciaio compresso è in campo elastico mentre l'acciaio teso è snervato.

Per $x > 2.14239 * c$ e $x < 0.259259 * d$ entrambi gli acciai (tesi e compressi) sono snervati, in funzione alla rapporto fra armature tese e compresse, le armature tese possono avere una deformazione $\varepsilon_f > 0.01$.

Per $x > 0.259259 * d$ e $x < 0.651767 * d$ l'acciaio compresso è snervato, l'acciaio teso è in campo elastico con $0 < \varepsilon_f < 0.00187$.

Per $x > 0.651767 * d$ e $x < d$ l'acciaio compresso è snervato, l'acciaio teso è in campo elastico con $0 < \varepsilon_f < 0.00187$.

ESERCIZIO

Verificare allo SLU una sezione rettangolare avente le seguenti caratteristiche.

Dati di partenza:

b= 30 cm; h= 50 cm; c= 4 cm; calcestruzzo classe 25/30; f_{yk}=450MPa, M_{ed}=12000 Kg*m

A'_f = A_f = 8,04 cm² pari 4 Ø 16

Incognite:

M_{rd}

Si ricava:

f_{cd} = 0.85*25/1.5 =141,67 = kg/cm² ; f_{yd}= 4500/1.15 = 3913 kg/cm² ; $\varepsilon_{cu} = 0.0035$;

$$E_f = 2.100.000 \ kg/cm^2$$

$\varepsilon'_s = 0.00187$; $f_{ctm} = 0.30 * f_{ck}^{2/3} = 11.905$; $c = 4$; $d = 50 - 4 = 46 \ cm$

La posizione dell'asse neutro viene determinata risolvendo l'equazione (4) con:

$A = 0.8 * b * f_{cd} = 0.8 * 30 * 141{,}68 = 3400{,}32$

$B = A'_f * E_s * \varepsilon_{cu} - A_f * f_{yd} = 8{,}04 * 2100000 * 0.0035 - 8{,}04 * 3913 = 27633{,}13$

$C = -c * E_f * A'_f * \varepsilon_{cu} = -4 * 2100000 * 8{,}04 * 0.0035 = -236376$

$$3400{,}32 * x^2 + 27633{,}13 * x - 236376 = 0$$

<u>Si ricava $\boldsymbol{x = 5.21}$.</u>

<u>Occorere verificare quanto asserito nella nota precedente.</u>

Essendo $x < 2.14239 * 4 = 8{,}57$ l'acciaio compresso deve essere in campo elastico in campo elastico.

La deformazione dell'acciaio compresso risulta per la (3) pari a :

$\varepsilon'_s = \frac{\varepsilon_{cu}}{x} * (x - c) = \frac{0.0035}{5.21} * (5.21 - 4) = 0.0008128 < 0.00187$

Quindi l'acciaio compresso è in **CAMPO ELASTICO**

La deformazione dell'acciaio teso per la (2) risulta pari a:

$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_{cu}}{x} * (d - x) = \frac{0.0035}{5.21} * (46 - 5.21) = 0.0274 > 0.01$

Quindi l'acciaio teso è **SNERVATO**

I valori delle tensioni di compressione e di trazione risultano:

$C1 = 0.8 * b * x * f_{cd} = 0.8 * 30 * 5.21 * 141{,}67 = 17.714{,}41$ (tens. di compr. nel calcestruzzo)

$C2 = A'_f * E_f * \varepsilon'_f = 8{,}04 * 2100000 * 0.0008128 = 13.723{,}31$ (tens. armatura compressa)

$T = C1 + C2 = 17.714{,}41 + 13.723{,}31 = 31.460{,}52$ (risult. delle tensioni di compressione)

A meno di piccole approssimazione poiché l'acciaio compresso è snervato il valore di T , dato alla risultante delle tensioni di trazione deve essere uguale a $C1 + C2$:

$$T = A_f * f_{yd} = 8.04 * 3913 = 31.484{,}64 \ Kg$$

$$M_{rd} = C1 * (d - 0.4 * x) + C2 * (d - c) = 17714{,}41 * (46 - 0.4 * 5.21) + 13723{,}21 * (46 - 4) = 13.543 \; Kg * m$$

Il rapporto $\frac{x}{d} = \frac{5.21}{46} = 0.11$; il rapporto $\frac{M_{rd}}{M_{ed}} = \frac{13543}{12000} = 1.13 > 1.00$ $\quad sezione\ verificata$

ESERCIZIO

Verificare allo SLU una sezione rettangolare avente le seguenti caratteristiche.

Dati di partenza:

b= 30 cm; h= 60 cm; c= 4 cm; calcestruzzo classe 25/30; f_{yk}=450MPa, M_{ed}=12000 Kg*m

A'_f = 3,08 pari 2 Ø 14; A_f = 12,06 cm² pari 6 Ø 16

Incognite:

M_{rd}

Si ricava:

f_{cd} = 0.85*25/1.5 =141,67 = kg/cm² ; f_{yd}= 4500/1.15 = 3913 kg/cm² ; $\varepsilon_{cu} = 0.0035$;

$E_f = 2.100.000 \; kg/cm^2$

$\varepsilon'_s = 0.00187$; $\quad f_{ctm} = 0.30 * f_{ck}^{2/3} = 11.905$; $\quad c = 4$; $\quad d = 60 - 4 = 56 \; cm$

La posizione dell'asse neutro viene determinata risolvendo l'equazione (3) con:

$A = 0.8 * b * f_{cd} = 0.8 * 30 * 141{,}68 = 3400.00$

$B = A'_f * E_s * \varepsilon_{cu} - A_f * f_{yd} = 4{,}02 * 2100000 * 0.0035 - 12{,}06 * 3913 = -24553.30$

$C = -c * E_f * A'_f * \varepsilon_{cu} = -4 * 2100000 * 4{,}04 * 0.0035 = -90552.00$

$$3400.00 * x^2 - 24553.30 * x - 90552.00 = 0$$

Si ricava $x = 9.91$ cm

Essendo $x > 2.14239 * 4 = 8{,}57$ l'acciaio compresso è SNERVATO.

La deformazione dell'acciaio compresso risulta per la (3) pari a :

$$\varepsilon'_s = \frac{\varepsilon_{cu}}{x} * (x - c) = \frac{0.0035}{9.91} * (9.91 - 4) = 0.00209 > 0.00187$$

Quindi l'acciaio compresso è effettivamente **SNERVATO**

La deformazione dell'acciaio teso per la (2) risulta pari a:

$\varepsilon_s = \frac{\varepsilon_{cu}}{x} * (d - x) = \frac{0.0035}{9.91} * (56 - 9.91) = 0.01628 > 0.01$ ----> Acciaio in campo 2

L'acciaio teso è **SNERVATO**

I valori delle tensioni di compressione e di trazione risultano:

$C1 = 0.8 * b * x * f_{cd} = 0.8 * 30 * 9.91 * 141{,}67 = 33.694{,}79$ (tens. di compr. nel calcestruzzo)

$C2 = A'_f * f_{yd} = 3{,}08 * 3913 = 12.052{,}04$ (risult. tens. armatura compressa)

$$M_{rd} = C1 * (d - 0.4 * x) + C2 * (d - c) = 33.694{,}79 * (56 - 0.4 * 9{,}91) + 12.052{,}04 * (56 - 4) = 23.800 \; Kg * m$$

Il rapporto $\frac{x}{d} = \frac{9{,}91}{56} = 0.18$; il rapporto $\frac{M_{rd}}{M_{ed}} = \frac{23800}{21000} = 1.13 > 1.00$ $\quad sezione\ verificata$

```
from numpy import *
from math import *
# questa funzione si limita ad eseguire la verifica di una sezione
# rettangolare doppia armatura
def ver_slu(Ai,As,b,h,c,fck,fyk,M):
  d= h - c  # altezza utile della sezione
  fcd=fck*0.85/1.5
  fyd=fyk/1.15

  #------ calcolo momento resistente
  eyd=0.00187 # deformazione acciaio al limite elastico
  ecu=0.0035
  Es=2100000
  euf=0.01
  A=b*0.8*fcd
  B=(As*Es*ecu-Ai*fyd)
  C= -As*Es*ecu*c
  print "Coefficiente  A dell'equazione   ",(str('%.2f'%A))
  print "Coefficiente  B dell'equazione   ",(str('%.2f'%B))
  print "Coefficiente  C dell'equazione   ",(str('%.2f'%C))
  x=(-B+sqrt(B*B-4*A*C))/(2*A)
  print "Posizione dell'asse neutro    cm    ", (str('%.2f'%x))
  if x<((ecu*c)/(ecu-eyd)): # x<2.14239*c=8.5889
    print "ACCIAIO COMPRESSO IN CAMPO ELASTICO  "
    print "ACCIAIO TESO SNERVATO  "
    esc=ecu*(x-c)/x # deformazione acciaio compresso
    print 'Deformazione acciaio compresso  ',(str('%.5f'%esc)),' < ',eyd
    est=((d-x)*esc)/(x-c)
    print "Deformazione acciaio teso       ", (str('%.5f'%est))
    C1=0.8*b*x*fcd
    C2=As*Es*esc
    dc=((C1*0.5*0.8*x)+C2*c)/(C1+C2)
    dd= d-dc
    Mu=(C1+C2)*(d-dc)
    a=x/d
    T=C1+C2
    sig_c= C1/(b*x*0.8)
    sig_As=C2/As
    sig_Ai=T/Ai
    print "Sforzo assorbito dal calcestruzzo compresso  Kg   ",int(C1)
    print "Sforzo assorbito dall'acciaio compresso      Kg   ",int(C2)
    print "Valore di dc       cm   ",(str('%.4f'%dc))
    print "Valore di d*       cm   ",(str('%.4f'%dd))
    print 'rapporto  x/d           cm    ',(str('%.2f'%a))
    print 'Momento ultimo         Kg*m   ',int(Mu/100)
    print 'Max Tensione calcestruzzo compresso    Kg/cmq  ',(str('%.2f'%sig_c))
    print 'Tensione accaiao compresso             Kg/cmq  ',(str('%.2f'%sig_As))
    print 'Tensione accaio teso                   Kg/cmq  ',(str('%.2f'%sig_Ai))
    print C1
    print C2
    print T
```

```
        if sig_Ai==fyd:
          print 'Acciaio in campo 2'
        if sig_Ai>=fyd and sig_Ai<fyd:
          print 'Acciaio in campo 3'

    if x>((ecu*c)/(ecu-eyd))and x<(ecu*d)/(ecu+euf): #2.14239*c=8.5889 and x<0.259259*d= 14.51
        esc=ecu*(x-c)/x # deformazione acciaio compresso
        if esc>0.00187 and esc<=0.01:
          print 'ACCIAIO COMPRESSO SNERVATO'
          print 'Deformazione acciaio compresso  ',(str('%.5f'%esc)),' > ',eyd
          C2=As*fyd
        est=((d-x)*esc)/(x-c)
        print '....deformazioni acciaio teso  ',est
        if est>0 and est<0.00187:
          print "ACCIAIO TESO IN CAMPO ELASTICO"
          print "Deformazione acciaio teso       ", (str('%.5f'%est))
        if est>0.001870 :
          print "ACCIAIO TESO SNERVATO"
          print "Deformazione acciaio teso       ", (str('%.5f'%est)), '   ----> Acciaio in campo 2'
        C1=0.8*b*x*fcd
        dc=((C1*0.5*0.8*x)+C2*c)/(C1+C2)
        dd= d-dc
        Mu=(C1+C2)*(d-dc)
        a=x/d
        T=C1+C2
        sig_c= C1/(b*x*0.8)
        sig_As=C2/As
        sig_Ai=T/Ai
        print "Sforzo assorbito dal calcestruzzo compresso  Kg   ",int(C1)
        print "Sforzo assorbito dall'acciaio compresso      Kg   ",int(C2)
        print "Valore di dc       cm   ",(str('%.4f'%dc))
        print "Valore di d*       cm   ",(str('%.4f'%dd))
        print 'rapporto  x/d            cm    ',(str('%.2f'%a))
        print 'Momento ultimo         Kg*m   ',int(Mu/100)
        print 'Max Tensione calcestruzzo compresso    Kg/cmq  ',(str('%.2f'%sig_c))
        print 'Tensione accaiao compresso            Kg/cmq  ',(str('%.2f'%sig_As))
        print 'Tensione accaio teso                  Kg/cmq  ',(str('%.2f'%sig_Ai))
        if est>0.00187 and est<0.01:
          print "ACCIAIO TESO SNERVATO"
          print "ACCIAIO IN CAMPO 3   "
        if est>0.001 :
          print "ACCIAIO TESO SNERVATO"
          print "ACCIAIO IN CAMPO 2  "
    if x>(ecu*d)/(ecu+euf) and x<(ecu*d)/(ecu+eyd):     # x>0.259259*d= 14.51 and x<0.651767*d
=36.49
        esc=ecu*(x-c)/x # deformazione acciaio compresso
        if esc>0.00187 and esc<=0.01:
          print 'ACCIAIO COMPRESSO SNERVATO'
          print 'Deformazione acciaio compresso  ',(str('%.5f'%esc)),' > ',eyd
          C2=As*fyd
        est=((d-x)*esc)/(x-c)
```

```
    if est>0 and est<0.00187:
      print "ACCIAIO TESO IN CAMPO ELASTICO"
      print "Deformazione acciaio teso       ", (str('%.5f'%est))
    if est>0.001870 and est<0.01:
      print "ACCIAIO TESO SNERVATO"
      print "Deformazione acciaio teso       ", (str('%.5f'%est)), ' > ',eyd,'   ----> Acciaio in campo 3'
    C1=0.8*b*x*fcd
    dc=((C1*0.5*0.8*x)+C2*c)/(C1+C2)
    dd= d-dc
    T=C1+C2
    Mu=T*(d-dc)
    a=x/d
    sig_c= C1/(b*x*0.8)
    sig_As=C2/As
    sig_Ai=T/Ai
    print "Sforzo assorbito dal calcestruzzo compresso  Kg   ",int(C1)
    print "Sforzo assorbito dall'acciaio compresso      Kg   ",int(C2)
    print "Valore di dc       cm   ",(str('%.4f'%dc))
    print "Valore di d*       cm   ",(str('%.4f'%dd))
    print 'rapporto  x/d            cm    ',(str('%.2f'%a))
    print 'Momento ultimo         Kg*m   ',int(Mu/100)
    print 'Max Tensione calcestruzzo compresso    Kg/cmq  ',(str('%.2f'%sig_c))
    print 'Tensione accaiao compresso             Kg/cmq  ',(str('%.2f'%sig_As))
    print 'Tensione accaio teso                   Kg/cmq  ',(str('%.2f'%sig_Ai))
    if sig_Ai==fyd:
      print 'Acciaio in campo 2'
    if sig_Ai>=0 and sig_Ai<fyd:
      print 'Acciaio in campo 3'

  if  x>(ecu*d)/(ecu+eyd) and x<=d:   #  0.651767*d =36.49  and  d=56
    esc=ecu*(x-c)/x # deformazione acciaio compresso
    if esc>0.00187 and esc<=0.01:
      print 'ACCIAIO COMPRESSO SNERVATO'
      print 'Deformazione acciaio compresso  ',(str('%.5f'%esc)),' > ',eyd
      C2=As*fyd
    est=((d-x)*esc)/(x-c)
    if est>0 and est<0.00187:
      print "ACCIAIO TESO IN CAMPO ELASTICO"
      print "Deformazione acciaio teso       ", (str('%.5f'%est)), ' > ',eyd,'   ----> Acciaio in campo 4'
    if est>0.001870 and est<0.01:
      print "ACCIAIO TESO SNERVATO"
      print "Deformazione acciaio teso       ", (str('%.5f'%est)),' > ',eyd
    C1=0.8*b*x*fcd
    dc=((C1*0.5*0.8*x)+C2*c)/(C1+C2)
    dd= d-dc
    T=C1+C2
    Mu=T*(d-dc)
    a=x/d
    sig_c= C1/(b*x*0.8)
    sig_As=C2/As
    sig_Ai=T/Ai
```

```
    print "Sforzo assorbito dal calcestruzzo compresso  Kg   ",int(C1)
    print "Sforzo assorbito dall'acciaio compresso      Kg   ",int(C2)
    print "Valore di dc       cm   ",(str('%.4f'%dc))
    print "Valore di d*       cm   ",(str('%.4f'%dd))
    print 'rapporto  x/d           cm    ',(str('%.2f'%a))
    print 'Momento ultimo        Kg*m   ',int(Mu/100)
    print 'Max Tensione calcestruzzo compresso    Kg/cmq  ',(str('%.2f'%sig_c))
    print 'Tensione accaiao compresso            Kg/cmq  ',(str('%.2f'%sig_As))
    print 'Tensione accaio teso                 Kg/cmq  ',(str('%.2f'%sig_Ai))
    if est>0 and est<0.00187:
      print 'Acciaio in campo 4'

#M_res_doppia(At,Ac,b,h,c,fck,fyk,D)
ver_slu(12.06,3.08,   30,60,4,250,4500,21000)
```